Faenza (RA) - 5 settembre 2013

Il rinnovamento dell’insegnamento dell’area aritmetico-algebrica nella scuola primaria e secondaria di I grado. Collocazione teorica, didattica, metodologica

Giancarlo Navarra

GREM, Università di Modena e Reggio Emilia

percorsi nell’aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico

progetto ArAl

Early Algebra e Progetto ArAl

- L'Early algebra
- Il Progetto ArAl
- Ricerca, sperimentazione, formazione
- Le collaborazioni con istituti e reti
- La Metodologia delle trascrizioni pluricommentate
- Il Glossario
- I siti: www.aralweb.unimore.it
  www.progettoaral.wordpress.com

La griglia 10×10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Concetti in gioco

- Rappresentazione di un numero
- Forma canonica e non canonica di un numero
- Processo / prodotto
- Parafrasi
- Connotazione / denotazione

Verso la griglia n×n

v	5×5	6×6	8×8	10×10	n×n
→					
←					
↓					
↑					
↙					
↗					
↘					
↖					

Verso la griglia n×n

v	5×5	6×6	8×8	10×10	n×n
→	+1	+1	+1	+1	+1
←	-1	-1	-1	-1	-1
↓	+5	+6	+8	+10	+n
↑	-5	-6	-8	-10	-n
↙					
↗					
↘					
↖					

Verso la griglia n×n

v	5×5	6×6	8×8	10×10	n×n
→	+1	+1	+1	+1	+1
←	-1	-1	-1	-1	-1
↓	+5	+6	+8	+10	+n
↑	-5	-6	-8	-10	-n
↙	+4	+5	+7	+9	?
↗	-4	-5	-7	-9	?
↘	+6	+7	+9	+11	?
↖	-6	-7	-9	-11	?

Verso la griglia n×n

v	5×5	6×6	8×8	10×10	n×n
→	+1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+1
←	-1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-1
↓	+5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+n
↑	-5	-6	-8	-10	-n
↙	+(5-1)	+(6-1)	+(8-1)	+(10-1)	+(n-1)
↗	-(5-1)	-(6-1)	-(8-1)	-(10-1)	-(n-1)
↘	+(5+1)	+(6+1)	+(8+1)	+(10+1)	+(n+1)
↖	-(5+1)	-(6+1)	-(8+1)	-(10+1)	-(n+1)

Rappresentazione canonica e non canonica di un numero

-n+1

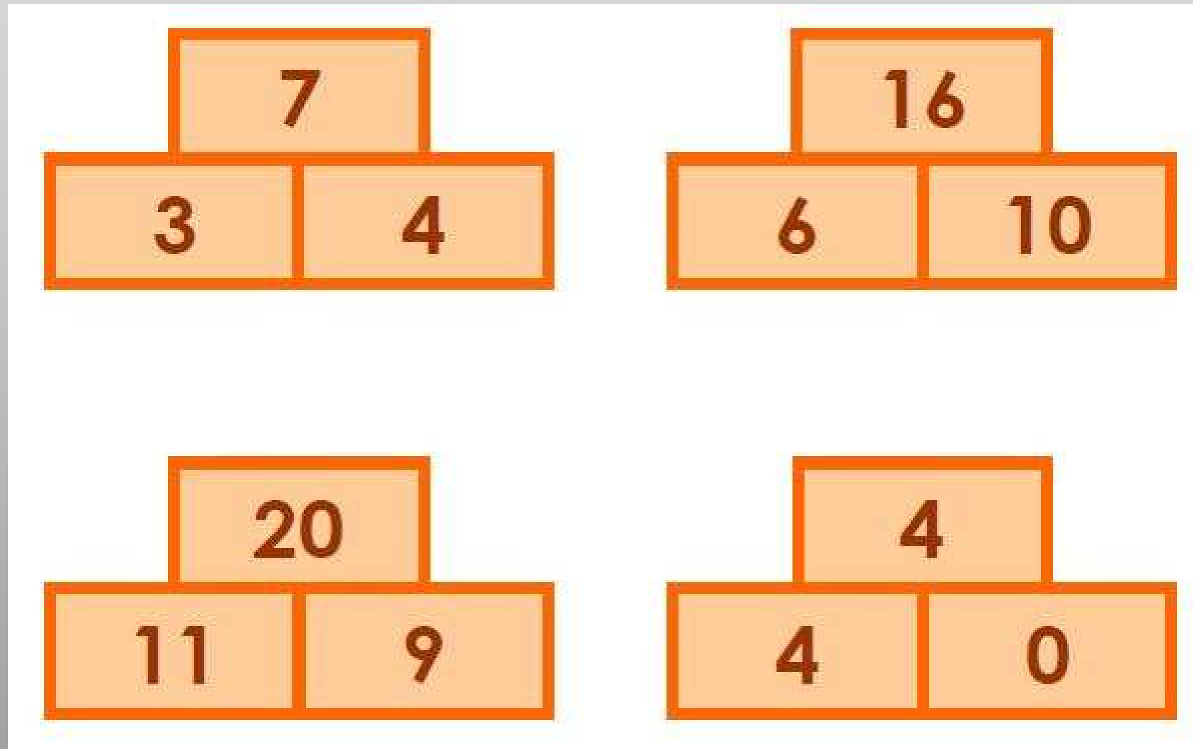
-n-1

Approccio all’algebra come linguaggio

Didattica tradizionale	Prospettiva early algebra
pensiero aritmetico	pensiero aritmetico
pensiero algebrico	pensiero algebrico
successivamente	intreccio

Approccio alla generalizzazione

Le piramidi



Concetti in gioco

- Rappresentazione di un numero
- Forma canonica e non canonica di un numero
- Processo / prodotto
- Parafrasi
- Connotazione / denotazione
- Uguale
- Rappresentare / risolvere
- Linguaggio naturale / matematico
- Tradurre

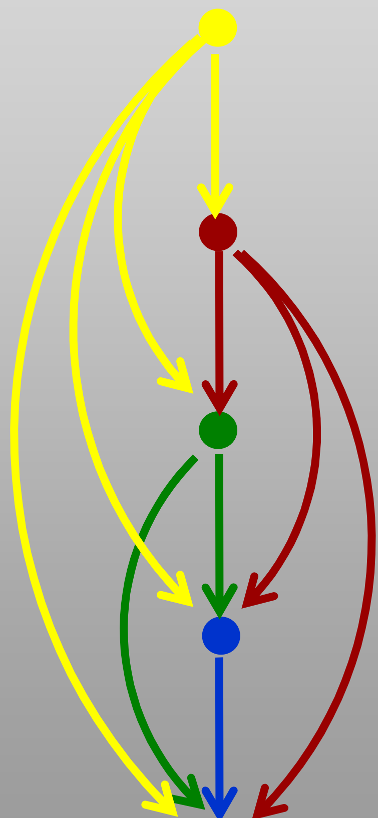
Verso la generalizzazione

Gli episodi di classe che esamineremo nel seminario sono ricavati da **trascrizioni di audioregistrazioni** effettuate da docenti dei gruppi ArAl della scuola dell'infanzia, primaria e secondaria di primo grado in applicazione della Metodologia delle Trascrizioni Pluricommentate.

Attraverso gli episodi esploreremo ipotesi operative e riflessioni teoriche sui modi per favorire dalla scuola primaria un percorso didattico teso **verso la generalizzazione**.

La Metodologia delle Trascrizioni Multicommentate (MTM)

Favorire la riflessione sull'attività in classe e la coerenza con i riferimenti teorici



Ricercatori universitari

Altri insegnanti
Insegnanti ricercatori

E-tutor

Insegnante

'Diario'

La Metodologia delle Trascrizioni Multicommentate (MTM)

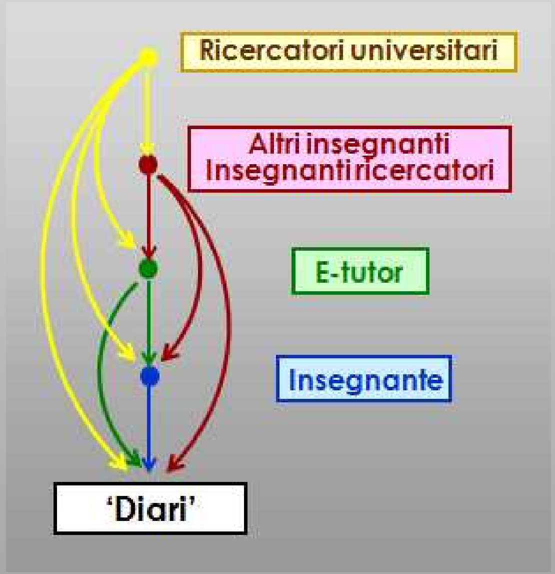
Commenti (2004-2012):
Più di 5000 in 215 Diari.

Dalla riflessione su Diari e Commenti nascono le Unità della Collana ArAl.

Diari GISCEL (2009-2012)
300 commenti in 10 Diari.

↓

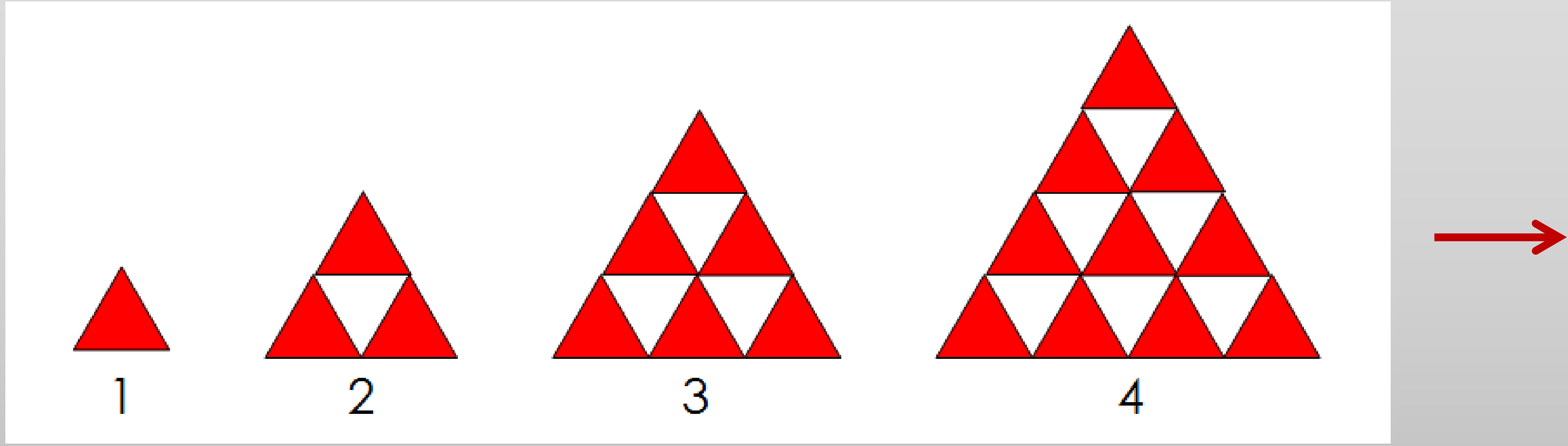
Inventario sulla generalizzazione



Generalizzazione e linguaggio

1. L'argomentazione

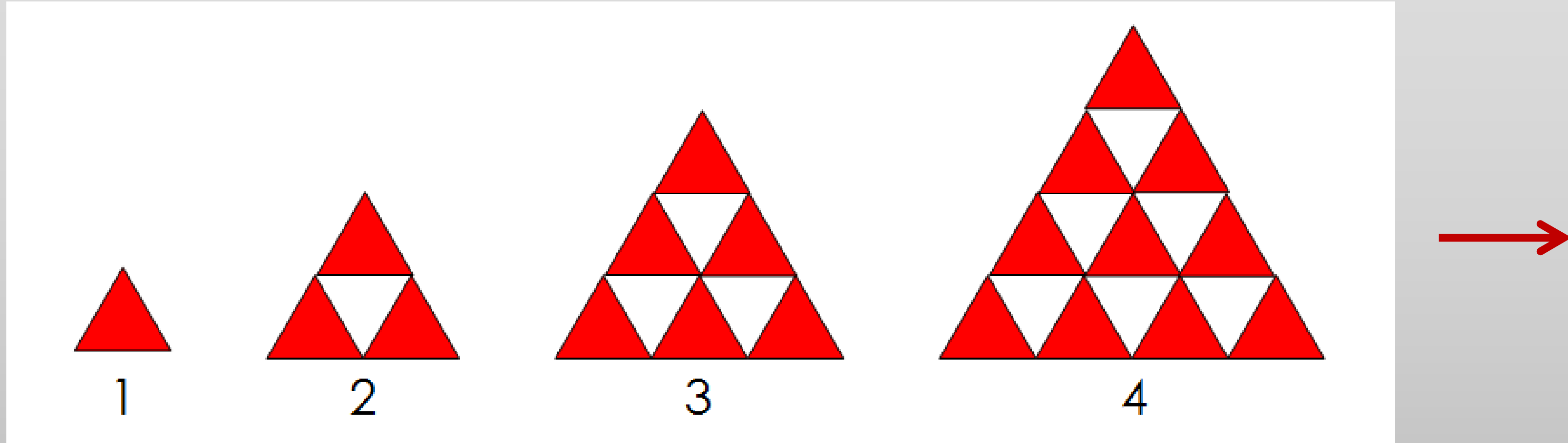
1. Generalizzazione e linguaggio: l'argomentazione



(1) Trova il numero di triangolini della 11ª piramide senza ricorrere al disegno.

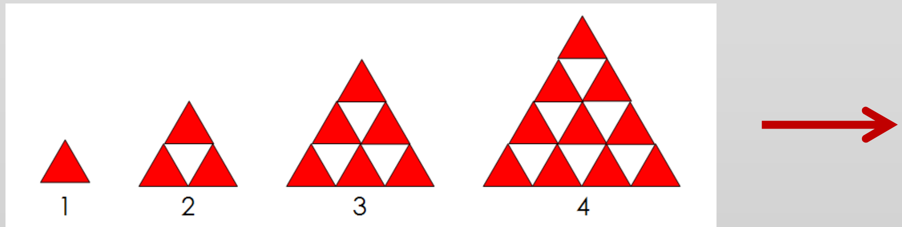
(2) Rappresenta per Brioshi una regola che permetta di trovare il numero totale dei triangoli di una piramide conoscendo il numero della sua posizione.

1. Generalizzazione e linguaggio: l'argomentazione



Gli alunni (11 anni) esplorano un 'pattern in crescita' con lo scopo di individuare delle leggi generali che pongano in relazione una caratteristica di ogni figura con il relativo numero di posto.

1. Generalizzazione e linguaggio: l’argomentazione

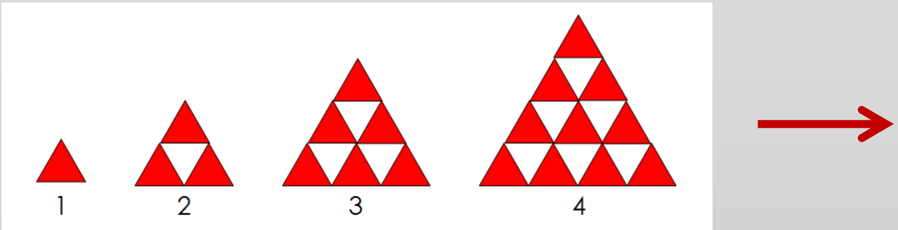


Gli alunni scelgono di lavorare sulla relazione fra il numero dei triangoli rossi e quello dei triangoli bianchi nella fila di base di una ‘piramide’ con un qualsiasi numero di piani.

Esplorano individualmente la situazione.

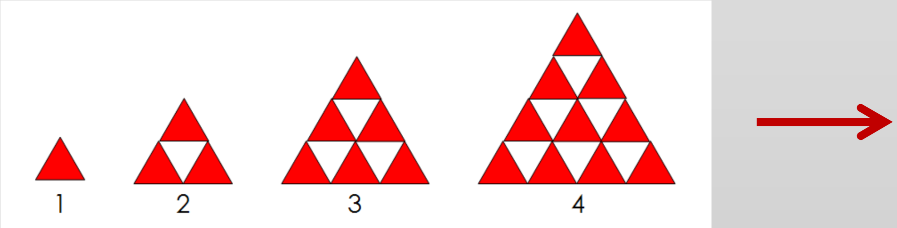
Nel corso della successiva discussione sugli esiti dell’esplorazione Ylenia osserva:

1. Generalizzazione e linguaggio: l'argomentazione



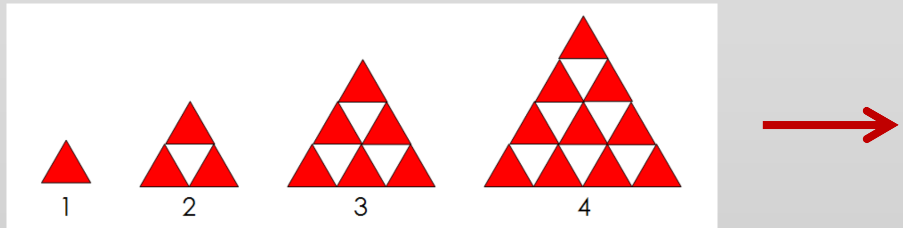
Ylenia: "Sulla linea dove si appoggiano le piramidi… per esempio nella quarta, i triangoli rossi sono quattro e i bianchi tre… la mia piramide di sei piani ha sulla base sei triangoli rossi e cinque bianchi… i bianchi sono sempre uno meno dei rossi…"

1. Generalizzazione e linguaggio: l'argomentazione



Ylenia: "… **Forse una piramide con un qualsiasi numero di piani ha i triangoli rossi sulla base che sono uguali al numero dei piani e i bianchi sono tanti quanti i rossi meno uno**".

1. Generalizzazione e linguaggio: l'argomentazione

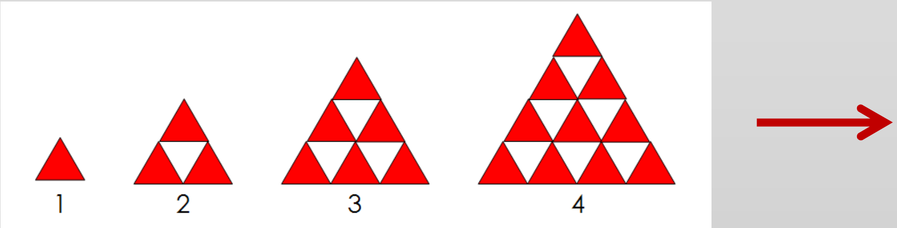


Ylenia: "… **Forse una piramide con un qualsiasi numero di piani ha i triangoli rossi sulla base che sono uguali al numero dei**

L'insegnante autrice del diario commenta:

"Ylenia non era giunta a questa considerazione prima del suo intervento ma, *mentre verbalizzava, deduceva ed esprimeva la regola generale*".

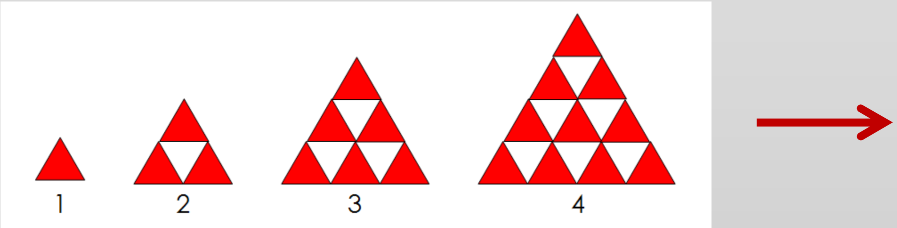
1. Generalizzazione e linguaggio: l'argomentazione



Il rapporto fra capacità di **argomentare** e di **generalizzare** è una potenzialità fondamentale nella costruzione sociale della conoscenza.

Ma affinché questo rapporto si espliciti, l'argomentazione deve rappresentare per insegnante e alunni un valore condiviso: ognuno si mette in gioco e si relaziona con il mettersi in gioco degli altri.

1. Generalizzazione e linguaggio: l'argomentazione



La ricchezza che emerge è che chi argomenta non conosce davvero le sue idee finché non le esprime.
Man mano che l'argomentare diventa un'abitudine l'alunno comprende il valore della parola: è il parlare collegando i fatti che rende trasparenti le loro affinità facendo emergere la consapevolezza del filo logico ***generale*** che le unisce.

Verso la generalizzazione

La verbalizzazione
L'argomentazione
La negoziazione dei significati
La condivisione dei significati

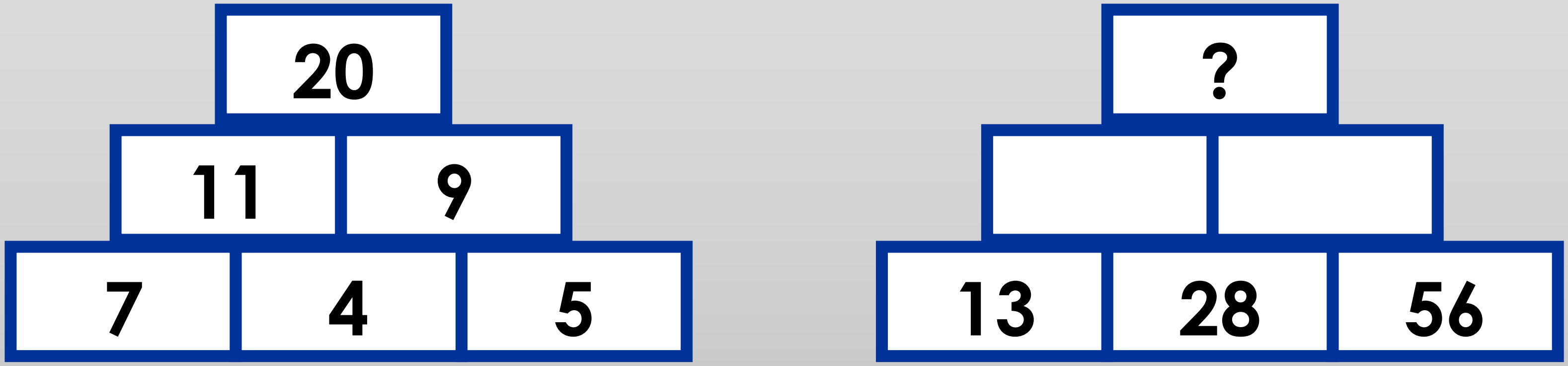
La costruzione sociale della conoscenza

favoriscono
l'approccio alla generalizzazione.
↓
Un secondo episodio

Generalizzazione e **linguaggio**

2. il ***generale potenziale***

2. Generalizzazione e linguaggio: il generale potenziale



Le piramidi di mattoni (10 anni)

L'insegnante guida la classe verso l'individuazione della 'legge' che permette di esprimere il numero nel mattone in alto in una piramide a tre piani in funzione dei tre numeri alla base **senza eseguire i calcoli intermedi**.

2. Generalizzazione e linguaggio: il generale potenziale

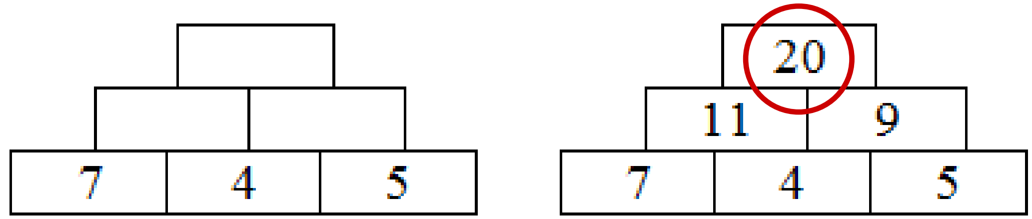
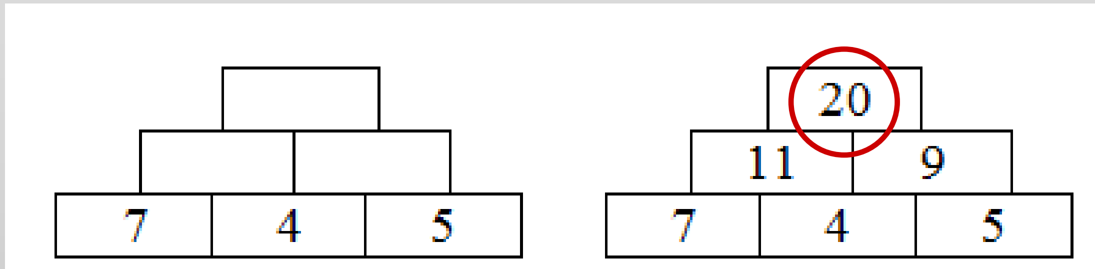


Fig.2a Fig.2b

Per individuare la regola, il completamento 'classico' non è sufficiente per organizzare una risposta, in quanto conduce ad un risultato (20, la sua rappresentazione canonica) *inespressivo*.

Conviene passare alla rappresentazione non canonica del numero in alto.

Rappresentazioni canonica e non canonica di un numero



20
Rappresentazione
canonica
del numero in alto

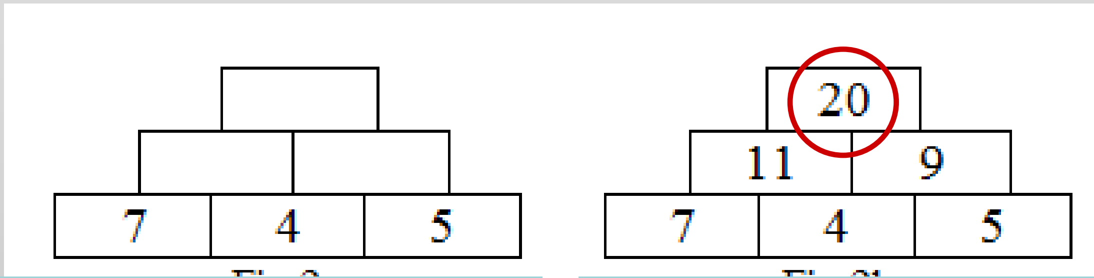
Prodotto
opaca
inespressiva

11=**7+4** 9=**4+5**
20=**7+4+4+5**
20=**7+4×2+5**

Rappresentazioni
non canoniche
del numero in alto

Processo
trasparente

Rappresentazioni canonica e non canonica di un numero



20

Rapp

de

ir

11=**7+4** 9=**4+5**

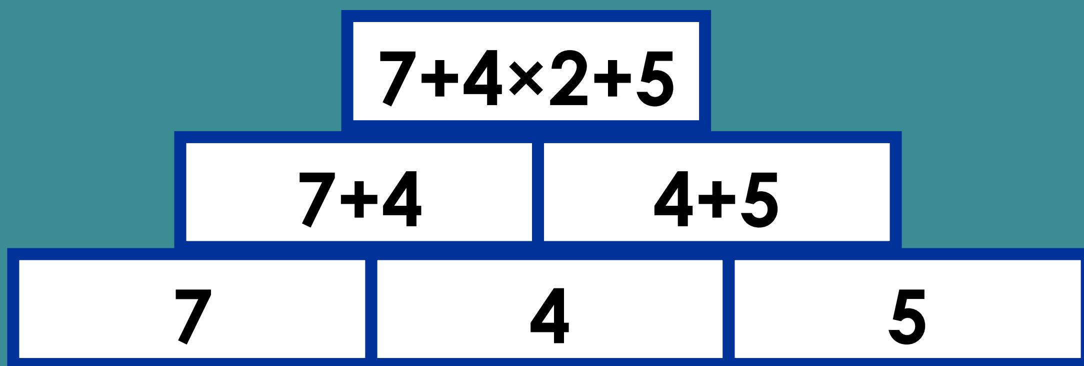
5

5

ioni

he

5



trasparente

2. Generalizzazione e linguaggio: il generale potenziale

7+4×2+5
7+4 | 4+5
7 | 4 | 5

Traduzione in linguaggio naturale di **7+4×2+5**

Il numero è la somma fra 7, 5 e il doppio di 4

13+8×2+4
13+8 | 8+4
13 | 8 | 4

6+3×2+9
6+3 | 3+9
6 | 3 | 9

11+6×2+4
11+6 | 6+4
11 | 6 | 4

13+28×2+56

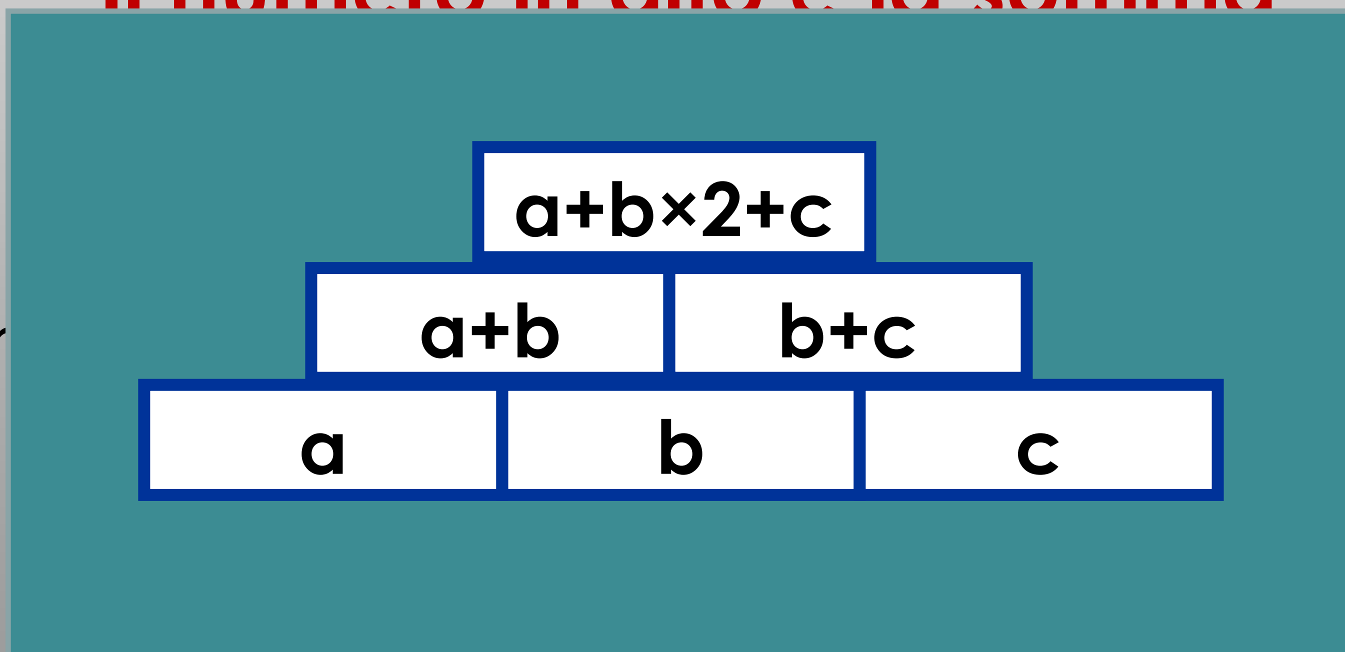
2. Generalizzazione e linguaggio: il generale potenziale

Dopo un certo numero di verifiche
la classe può ipotizzare una definizione
negoziata e condivisa:
**Il numero in alto è la somma
fra i due numeri laterali
e il doppio del numero centrale**

La frase contiene un **generale potenziale**
attraverso il quale conquistare
la traduzione in linguaggio algebrico:
$\mathbf{n=a+2b+c}$.

Dopo un certo numero di verifiche
la classe può ipotizzare una definizione
negoziata e condivisa:

Il numero in alto è la somma



La fr … **ziale**

la … co:

n=a+2b+c.

2. Generalizzazione e linguaggio: il generale potenziale

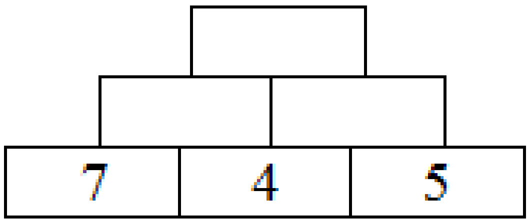


Fig.2a

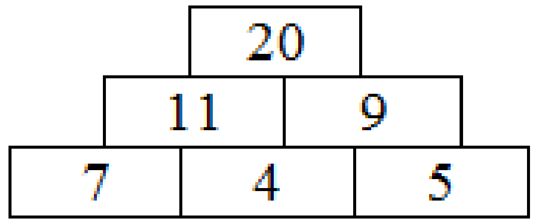


Fig.2b

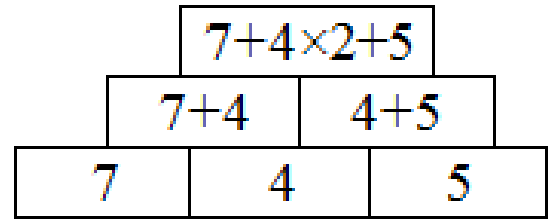


Fig.2c

La rappresentazione **non canonica** può essere considerata un **traghetto semantico verso la generalizzazione**.

Il concetto di *generale potenziale* si pone come ponte fra l'aritmetica e la notazione algebrica con alunni fra i 6 e i 14 anni.

Generalizzazione e **linguaggio**

3. Si collega all'episodio precedente: l'alunno ***produttore di pensiero 'originale'***

3. Generalizzazione e linguaggio: l'alunno *produttore di pensiero*

Nell'episodio precedente gli alunni sono stati guidati verso la costruzione collettiva di una definizione generale, pur migliorabile, e l'hanno esplicitata: sono stati protagonisti come produttori di pensiero matematico originale.

Tradizionalmente invece è l'insegnante che fa da tramite fra momenti topici del pensiero matematico istituzionale (principi, teoremi, proprietà, eccetera) e la loro applicazione.

3. Generalizzazione e linguaggio: l’alunno *produttore di pensiero*

In questi casi gli alunni sono riproduttori di una teoria alla cui organizzazione sono fondamentalmente estranei.

È importante che essi vengano educati, attraverso forme di esplorazione prima individuale e poi collettiva, a produrre **in linguaggio naturale** conclusioni **generali** da **condividere** con i compagni e l’insegnante, organizzandole in modo coerente e comunicabile, come fase intermedia verso la traduzione in **linguaggio matematico**.

Intervallo

Alcune questioni di carattere generale

Aritmetica e algebra

	Aritmetica												
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
									Algebra				

Tradizionalmente, i curricoli separano lo studio dell'aritmetica (primaria e primi anni della secondaria) da quello dell'algebra (secondaria).

La ricerca dimostra gli effetti negativi di un passaggio troppo veloce dall'aritmetica alla manipolazione simbolica.

Aritmetica e algebra

	Aritmetica												
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
									Algebra				

Prospettiva

promuovere in ambito aritmetico
dai primi anni della scuola primaria
lo sviluppo del pensiero algebrico

↓

early algebra

Early algebra

	Aritmetica												
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
									Algebra				

L'ipotesi dell'early algebra è che il normale percorso aritmetica → algebra debba essere riformulato in modo da dare agli studenti l'opportunità di incontrare il pensiero algebrico sin dal momento in cui sviluppano le prime attività in ambito aritmetico.

Early algebra

	Aritmetica												
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
									Algebra				

Questo non significa portare il curricolo di algebra nella scuola primaria, ma riformare il modo in cui si dovrebbe concepire e insegnare l'aritmetica promuovendo il passaggio da una concezione **procedurale** di questa ad una concezione **relazionale** e **strutturale**.

Procedurale - relazionale

$4\times2+1=9$ **equivalenza**

Lettura procedurale

- “Faccio 4 per 2 più 1 e mi risulta 9”
- “Moltiplico 4 per 2, aggiungo 1 e ottengo 9”
- “Sommo il doppio di 4 a 1 e trovo 9”
- “… mi dà…”

Cosa faccio

$(a+b)\times(a-b)$

Sommo a con b, poi sottraggo b ad a e infine moltiplico i due risultati

Prodotto di due binomi

Cos’è

Procedurale - relazionale

$4 \times 2 + 1 = 9$ **equivalenza**

moltiplicativo

additivo

relazione di equivalenza

Lettura procedu

- “Faccio 4 per 2 più 1 e mi risulta 9”
- “Moltiplico 4 per 2, aggiungo 1 e ottengo 9”
- “Sommo il doppio di 4 a 1 e trovo 9”
- “… mi dà… “

ura relazionale

- “La somma fra il … e 1 è uguale a 9”
- “9 è la somma fra il doppio di 4 e 1”
- “La somma fra il quadruplo di 2 e 1 è uguale a 9”

Aritmetica e algebra

	Aritmetica												
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
									Algebra				

L'uso di notazioni formali non è né necessario né sufficiente per *pensare algebricamente*.

Il pensiero algebrico si caratterizza per il modo in cui **si guarda** agli oggetti.

4.
Generalizzazione e percezione

4. Generalizzazione e percezione

(dalla terza primaria in poi)

Si chiede ad ogni alunno di esprimere la sua strategia di conteggio per individuare il numero totale di perle di questa collana:

Si delineano due diverse percezioni che conducono a due diverse rappresentazioni delle strategie:

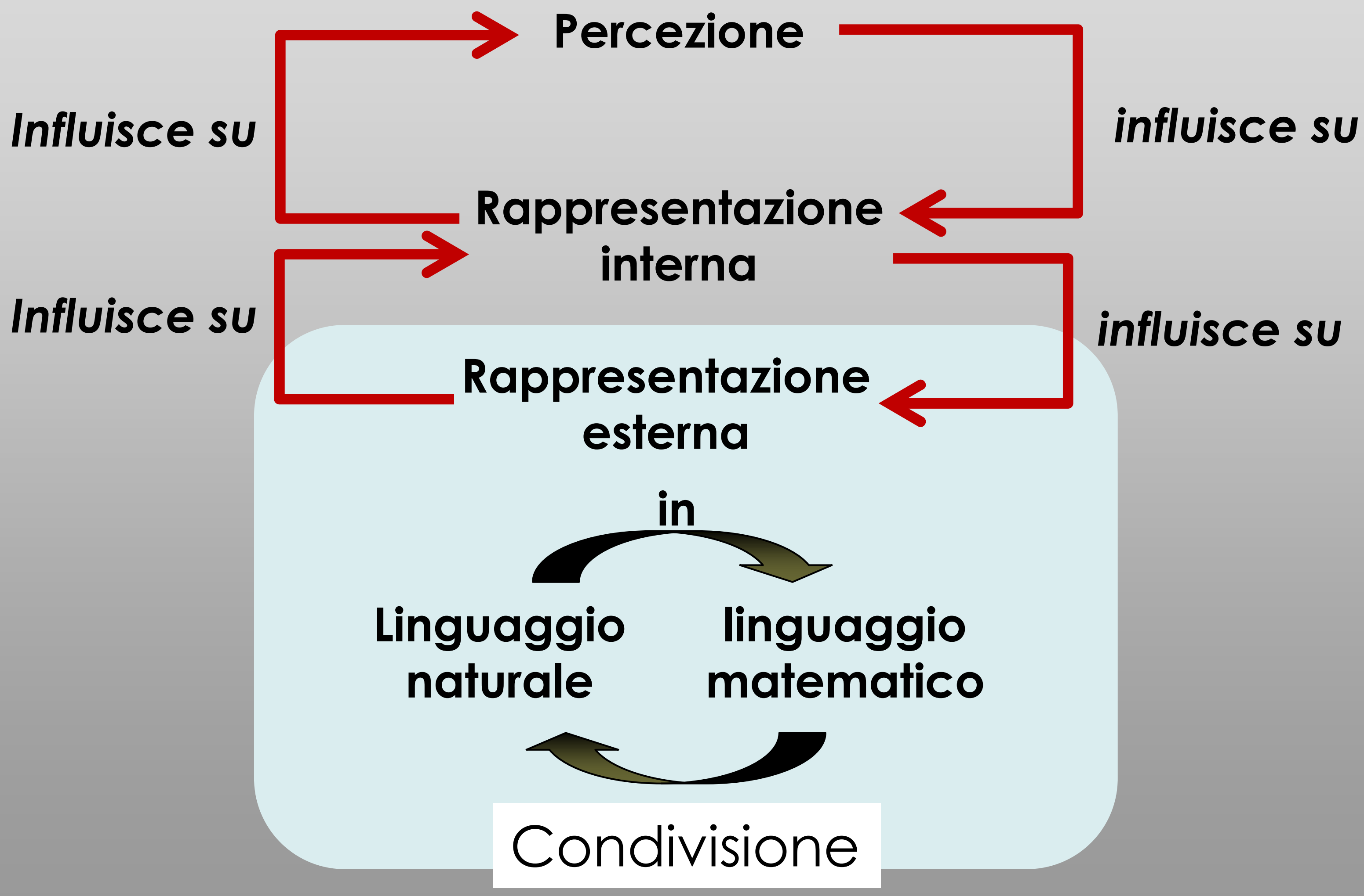
4. Generalizzazione e percezione

(a) visualizzare separatamente le perle bianche da quelle nere conduce alla rappresentazione $2\times9+3\times9$;

(b) ‘vedere’ il modulo conduce a $(2+3)\times9$.

In generale, possiamo interpretare la dinamica della situazione di classe attraverso un modello:

4. Generalizzazione e percezione



4. Generalizzazione e percezione

Percezione

Rappresentazione interna

Rappresentazione esterna

"Vedo 2 perle bianche che si ripetono 9 volte. Poi 3 nere che si ripetono 9 volte.
Le sommo."

↓

$2\times9+3\times9$

"Vedo un gruppo di 5 perle, 2 bianche e 3 nere, che si ripetono 9 volte."

↓

$(2+3)\times9$

Proprietà distributiva

Lingu… naturale

…gio matematico

$2\times9+3\times9=(2+3)\times9$

Rappresentazioni

esterne ← **interne**

iconiche

verbali orali

verbali scritte

simboli matematici

gestuali

grafiche

sagittali

tabulari

insiemistiche

…

Rappresentazioni

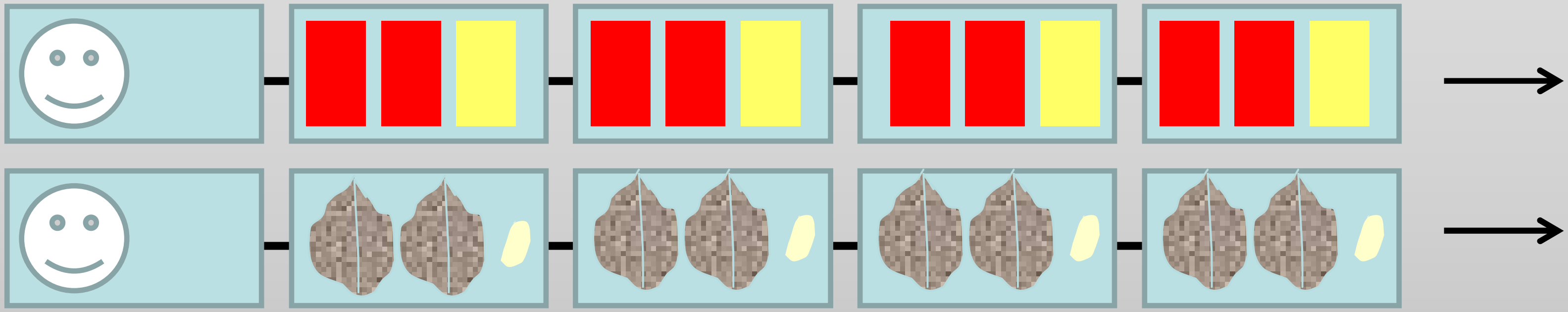
Aspetti semantici e sintattici dei linguaggi

Balbettio algebrico

6.
Generalizzazione
e aspetti matematici fondativi:
la conquista del concetto di
analogia strutturale

Prima primaria
(situazioni simili si verificano anche nella scuola dell'infanzia)

6. Generalizzazione e aspetti matematici fondativi:
La conquista del concetto di analogia strutturale



I: Perché stai guardando proprio questi due treni? Mi dici cosa contengono?

Rosa: C'è uno rosso, uno rosso e uno giallo.

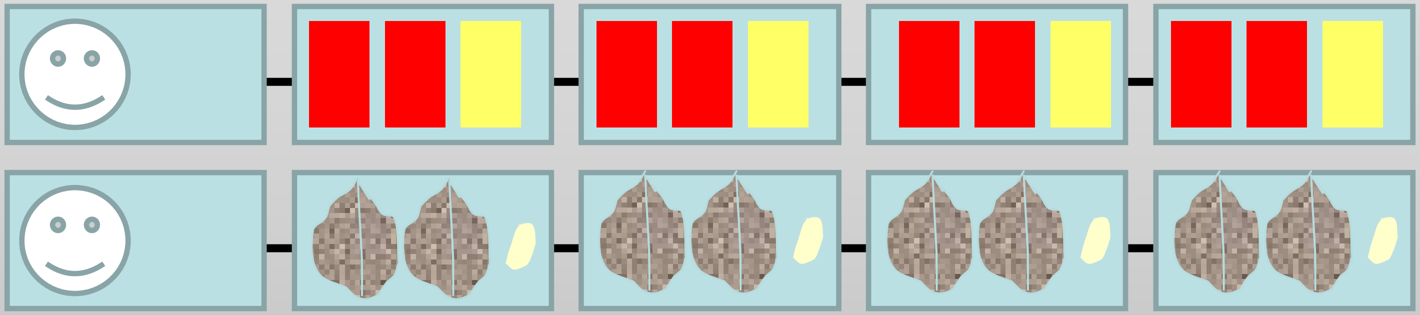
I: Dei Duplo. Sì, e in questo?

Rosa: Noce, noce, girasole e va avanti così.

I: E allora?

Rosa: Sono quasi uguali.

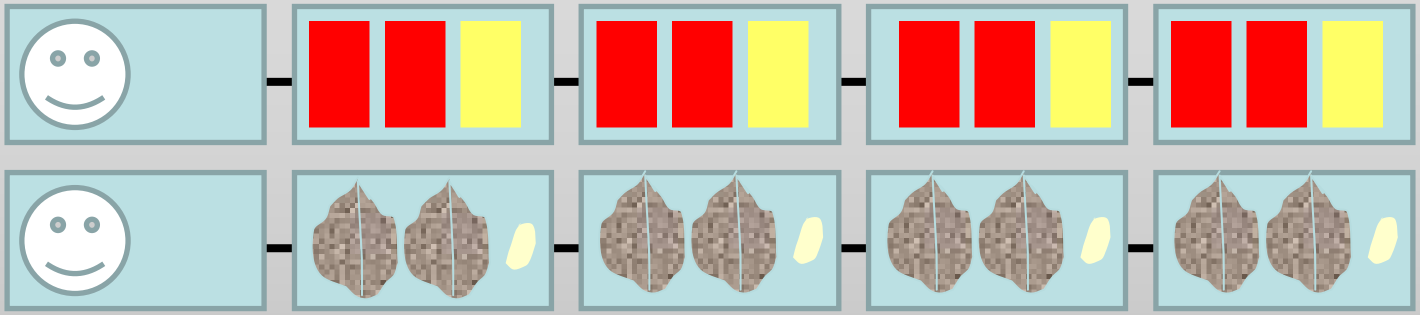
6. Generalizzazione e aspetti matematici fondativi:
La conquista del concetto di analogia strutturale



Rosa sta facendo dell'algebra **perché intuisce l'analogia strutturale fra i due treni**.

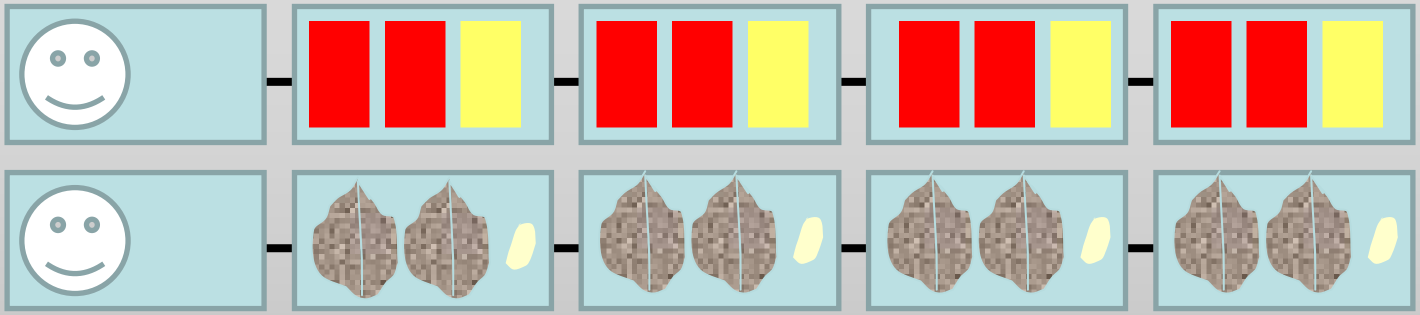
Sin dall'infanzia o dalla prima primaria gli alunni possono essere messi nella condizione di riconoscere **relazioni** fra gli elementi di una successione e il loro numero di posto.

6. Generalizzazione e aspetti matematici fondativi: La conquista del concetto di analogia strutturale



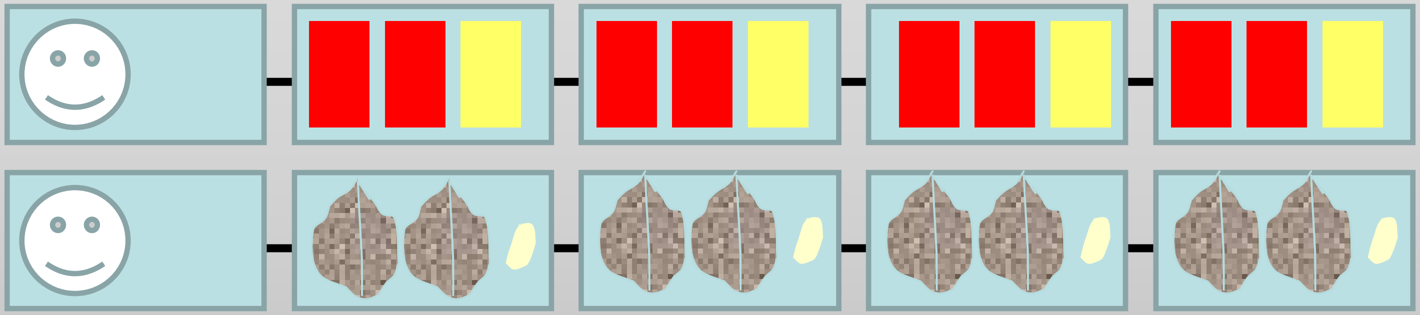
Di conseguenza scoprono *analogie* (in questo caso fra le strutture dei due treni), le descrivono a parole e le rappresentano con un codice (per esempio AAB) avvicinandosi così ad un embrione di linguaggio formalizzato e quindi alla **generalizzazione**.

6. Generalizzazione e aspetti matematici fondativi:
La conquista del concetto di analogia strutturale



La costruzione del codice costituisce il risultato *collettivo* di una lettura **relazionale** della situazione. L'attenzione è puntata non tanto sui suoi elementi, quanto sulle relazioni che li collegano. Stabilire corrispondenze fra situazioni differenti permette lo sviluppo del pensiero analogico.

6. Generalizzazione e aspetti matematici fondativi:
La conquista del concetto di analogia strutturale



La scuola dell'infanzia si inserisce al primo gradino del processo, in una logica di continuità con la primaria, dove questi embrioni di pensiero maturano attraverso un'aritmetica costruita in una prospettiva algebrica, verso una generalizzazione più matura e un'astrazione più evoluta.

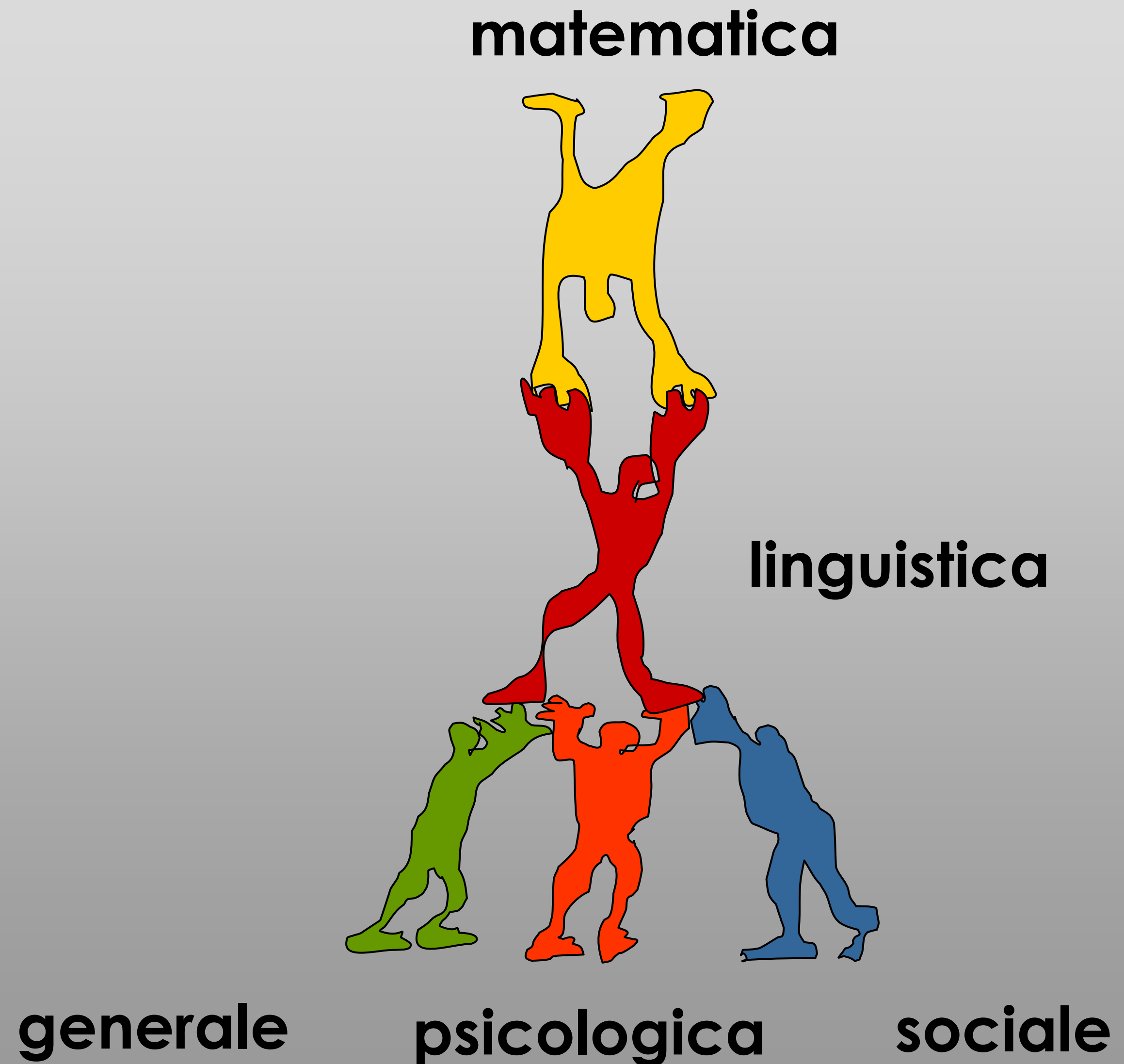
Dal pensiero prealgebrico al pensiero algebrico

	Aritmetica												
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
									Algebra				

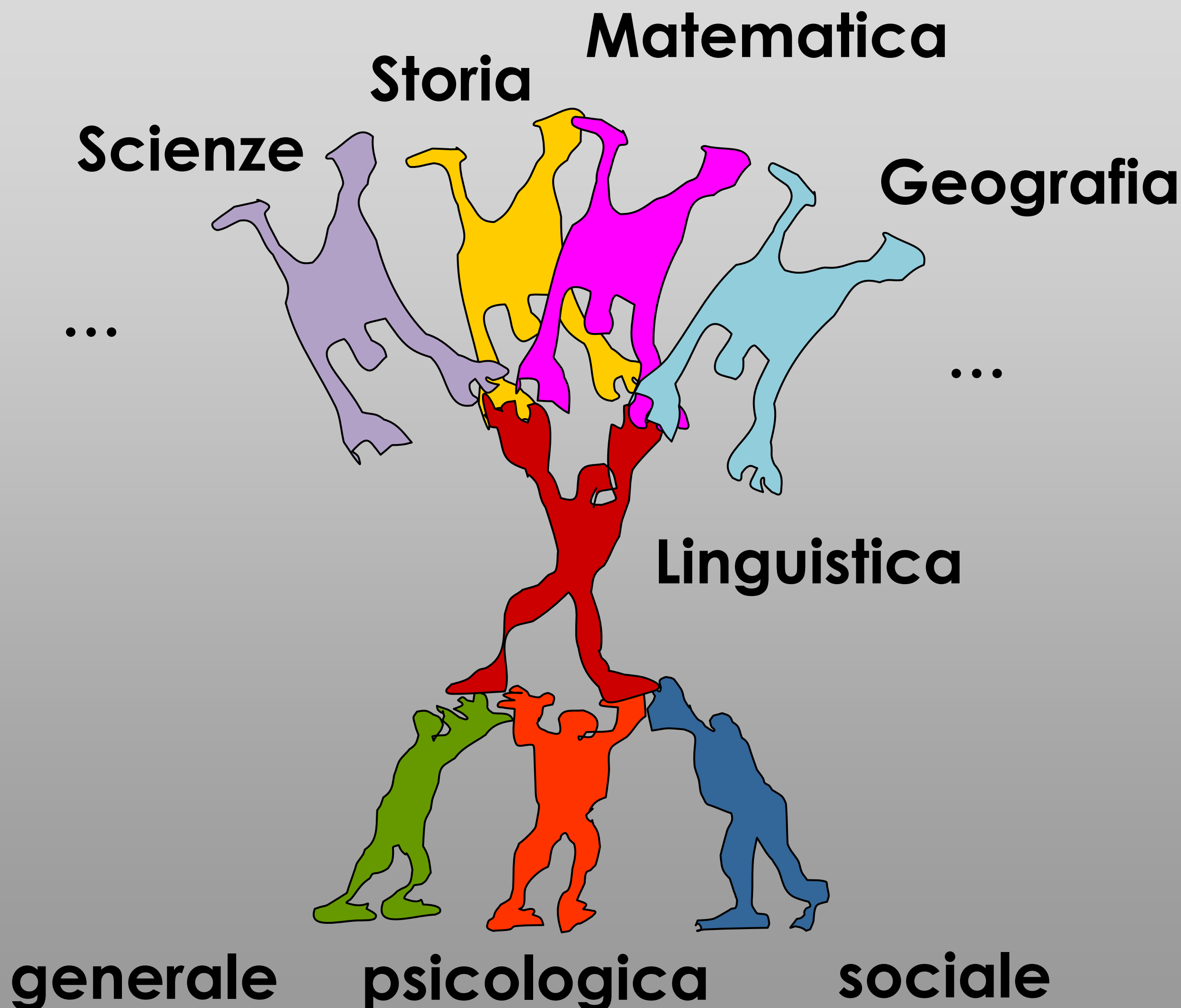
Evoluzione

Early Algebra (EA)													
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
EA						EA-PA				PA			
						Pensiero Algebrico (PA)							

La piramide delle competenze



La piramide delle competenze generalizzata



Costruzione sociale della conoscenza

Discussione, riflessione sui processi

Negoziazione dei significati

Condivisione dei significati

Istituzionalizzazione delle conoscenze

Devoluzione

John Mason

Researching your own practice: the discipline of noticing

“Ogni professionista, indipendentemente dall'ambito in cui opera, desidera saper cogliere le possibilità, essere sensibile alle situazioni e rispondere in modo appropriato. Ma ciò che si considera appropriato dipende da ciò a cui si attribuisce valore, che dipende a sua volta da ciò che si è capaci di notare. →

Microsituazioni e microdecisioni

→

Nel caso dell'insegnante notare ciò che gli alunni fanno o come rispondono, valutare ciò che dicono anche contro le proprie aspettative e i propri criteri di valutazione e considerare ciò che potrebbe essere detto o fatto in seguito.

È sin troppo ovvio dire che non si può intervenire su ciò che non si nota; non si può scegliere di fare qualcosa se non si ravvisa l'opportunità di farlo."

Microsituazioni e microdecisioni

Le questioni allora sono:

Cosa dovrebbe notare l'insegnante?

Chi insegnerebbe a notare questo **cosa**?

La metodologia dei diari pluricommentati intende fornire un contributo in questa direzione, potenziando la sensibilità degli insegnanti verso il **cosa** notare. Costruendo insegnanti **metacognitivi** che favoriscano lo sviluppo di studenti **metacognitivi**.

Dal pensiero prealgebrico al pensiero algebrico